

ΘΕΜΑ 1. Να χαρακτηρίσετε ως **σωστή** ή **λανθασμένη**, κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις. Σε κάθε ερώτημα να δικαιολογηθεί πλήρως η απάντησή σας.

(1) Ένας γεωμετρικός μετασχηματισμός του επιπέδου, έχει πεπερασμένο το πλήθος σταθερά σημεία.

(2) Ο γραμμικός γεωμετρικός μετασχηματισμός του επιπέδου, ο πίνακας του οποίου είναι ο

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

παριστάνει συμμετρία ως προς τον άξονα yy' .

(3) Ο γραμμικός γεωμετρικός μετασχηματισμός της ανάκλασης ως προς ευθεία (ϵ) του επιπέδου, είναι κανονικός.

(4) Για δύο μη ομόκεντρους κύκλους C_1, C_2 , υπάρχει μοναδική ομοιοθεσία που απεικονίζει τον κύκλο C_1 στον κύκλο C_2 .

(5) Μια ισομετρία απεικονίζει ευθείες σε ευθείες.

(6) Ο γεωμετρικός μετασχηματισμός της αντιστροφής, απεικονίζει τα εσωτερικά σημεία του κύκλου αντιστροφής, σε σημεία του κύκλου αντιστροφής.

(7) Η σύνθεση δύο αντιστροφών, με κύκλους αντιστροφής $C_1((0, 0), R_1)$ και $C_2((0, 0), R_2)$ με $R_1 \neq R_2$, είναι ομοιοθεσία του επιπέδου.

(1,5 μονάδες)

ΘΕΜΑ 2.

(1) Να δοθεί ο ορισμός της ισομετρίας σε έναν Ευκλείδειο χώρο \mathbb{R}^n , εφοδιασμένο με το σύνηθες εσωτερικό γινόμενο.

Στη συνέχεια να αποδείξετε ότι το σύνολο των ισομετριών του Ευκλείδειου χώρου \mathbb{R}^n αποτελεί ομάδα, με πράξη τη σύνθεση των απεικονίσεων $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, όπου φ ισομετρία.

(1 μονάδα)

(2) Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός μετασχηματισμός της στροφής του επιπέδου κατά γωνία θ , το κέντρο της οποίας είναι η αρχή των αξόνων, είναι ισομετρία.

(1 μονάδα)

(3) Να εξετάσετε (με χρήση ισομετριών) αν τα τετράπλευρα $\delta_1 = \{(5, 2), (7, 2), (5, 5), (7, 5)\}$ και $\delta_2 = \{(0, -1), (0, -3), (-3, -3), (-3, -1)\}$ του επιπέδου $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, είναι ίσα.

(1 μονάδα)

ΘΕΜΑ 3.

(1) Να προσδιορίσετε την ομάδα συμμετριών (του επιπέδου) του κανονικού πενταγώνου. Στη συνέχεια να εξετάσετε αν η παραπάνω ομάδα είναι αβελιανή.

(1 μονάδα)

(2) Να προσδιορίσετε την ομάδα συμμετριών (του επιπέδου) ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου, το οποίο δεν είναι τετράγωνο. Με ποια γνωστή σας ομάδα είναι ισόμορφη η παραπάνω ομάδα; Να δικαιολογηθεί πλήρως η απάντησή σας.

(1 μονάδα)

ΘΕΜΑ 4.

(1) Να προσδιορίσετε την εικόνα του κύκλου $(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = \rho^2$, μέσω της αντιστροφής με κύκλο αντιστροφής τον μοναδιαίο κύκλο.

(1.5 μονάδες)

(2) Να κατασκευάσετε κύκλο C_1 , ορθογώνιο προς δοθέντα κύκλο $C((0, 0), R)$, έτσι ώστε ο κύκλος C_1 να διέρχεται από δοθέντα σημεία A, B του επιπέδου, όπου $A, B \neq (0, 0)$ και τα σημεία $(0, 0), A, B$ είναι μη συνευθειακά.

(1 μονάδα)

ΘΕΜΑ 5. Θεωρούμε την αντιστροφή, κέντρου O και ακτίνας ρ . Αν P'_1, P'_2 τα αντίστροφα σημεία των P_1, P_2 αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

$$P'_1 P'_2 = \frac{\rho^2 \cdot P_1 P_2}{OP_1 \cdot OP_2}.$$

Στη συνέχεια θεωρούμε τετράπλευρο $ΑΒΓΔ$ εγγεγραμμένο σε κύκλο. Με χρήση της γεωμετρίας της αντιστροφής, να δειχθεί ότι το γινόμενο των διαγωνίων του, είναι ίσο με το άθροισμα των γινομένων των απέναντι πλευρών του. Τι συμπέρασμα βγάζουμε αν το τετράπλευρο δε μπορεί να εγγραφεί σε κύκλο;

(2 μονάδες)

Καλή επιτυχία !!!
